ASIGNATURA DE MÁSTER:

TOPOLOGÍA

Curso 2017/2018

(Código:21152415)

1.PRESENTACIÓN

La asignatura que nos ocupa se dedicará fundamentalmente al estudio de la Topología Algebraica. Ésta es una de las principales ramas de la Topología que hace uso del formalismo algebraico para trabajar en problemas relacionados con espacios topológicos y aplicaciones continuas.

Uno de los problemas fundamentales de la Topología es el estudio y la clasificación de los espacios topológicos y de las aplicaciones continuas entre ellos. Existen diferentes métodos para llevar a cabo esta clasificación. Entre ellos destaca el método del establecimiento de invariantes topológicos que permitan distinguir entre espacios de diferentes clases topológicas. Estos invariantes pueden ser de naturalezas diferentes.

En este curso de Topología, se estudian algunos invariantes topológicos de naturaleza algebraica, tales como el grupo fundamental de homotopía y los grupos de homología y cohomología.

Esto exige un cierto conocimiento de la Teoría de Grupos, y, especialmente, de la Teoría de Grupos Abelianos o Conmutativos y algunas nociones básicas de la Teoría de Módulos.

Se asocian estructuras algebraicas a los espacios y aplicaciones continuas que cumplen las propiedades funtoriales. Estas propiedades garantizan que cada estructura algebraica asociada sea una construcción invariante por homeomorfismos. Si pensamos, por ejemplo, en el grupo fundamental, esto significa que si dos espacios topológicos son homeomorfos entonces sus grupos de homotopía asociados son grupos isomorfos.

En el caso de los grupos de homología, podemos hacer algunas consideraciones semejantes, por lo que estos grupos de homología nos permitirán distinguir en algunos casos entre espacios pertenecientes a diferentes clases topológicas.

Dos nociones fundamentales en Topología Algebraica son las nociones de homotopía de aplicaciones continuas y de tipo de homotopía de espacios topológicos, nociones que están fuertemente relacionadas entre sí, y que se basan en la idea de deformación con continuidad. Las construcciones de las estructuras algebraicas asociadas a los espacios, que se definen en Topología Algebraica, tienen la propiedad de ser invariantes, no solamente del tipo topológico, sino también del tipo de homotopía de los espacios topológicos. Se estudia, en consecuencia, la invariancia homotópica del grupo fundamental y también la invariancia homotópica de los grupos de homología y cohomología.

Esta asignatura tiene además una vertiente práctica por medio de la construcción de algunos tipos de espacios que aparecen frecuentemente en la matemática y que aportan excelentes ejemplos de aplicación de la teoría aquí desarrollada, además de proporcionar al alumno la oportunidad de desarrollar su capacidad de razonamiento espacial.

2.CONTEXTUALIZACIÓN

La Topología es una rama de las Matemáticas que se ha desarrollado enormemente en los últimos años y juega un papel importante en otras ramas de esta ciencia. La Topología se ocupa del estudio de los espacios topológicos y de las aplicaciones continuas entre ellos.

La asignatura que nos ocupa se dedicará a la Topología Algebraica, lo que permitirá el cálculo efectivo de invariantes de ciertos espacios topológicos. Se hará un enfoque práctico, fijándonos en algunas construcciones de espacios topológicos, lo cuál servirá de estímulo para la iniciativa del estudiante y al mismo tiempo ayudará a entender mejor la

línea que sigue la teoría.
La teoría comienza por el estudio del primer grupo de homotopía, y el concepto de equivalencia de homotopía. Un concepto fundamental y muy relacionado con el de primer grupo de homotopía es el de espacio recubridor. El espacio recubridor es fundamental en el estudio de la topología y su relación con la geometría, y es una herramienta muy utilizada en estudios más avanzados en topología.
Posteriormente se estudian los grupos de homología simplicial, que ya han formado parte del temario de la asignatura Introducción a la Topología Algebraica y que servirán de introducción a la homología singular. La homología singular es el tema que abarca la mayor parte del curso, en este tema se estudia la relación entre homotopía y homología, la sucesión exacta de homología, y la sucesión de Mayer-Vietoris. Esto constituye el núcleo clásico de cualquier teoría de homología.
Finalmente se tratará la Cohomología que es una teoría dual de la Homología, pero que además de la estructura aditiva posee una multiplicativa, lo que la hace más potente. Tanto en el caso de la Homología como de la Cohomología, se tratará el problema del cálculo de coeficientes arbitrarios a partir del estudio realizado con coeficientes enteros. La dualidad de Poincaré pone de manifiesto la relación entre ambas teorías, de hecho este teorema fue enunciado antes de que existiese un desarrollo formal de éllas.
La Topología Algebraica es un instrumento muy potente para la investigación de los espacios topológicos, especialmente las variedades, los CW-complejos, los complejos celulares, los complejos simpliciales, etc, además de ser un lenguaje de necesario manejo para la lectura de material de investigación en el campo de la Geometría y la Topología.

3.REQUISITOS PREVIOS RECOMENDABLES

Como consecuencia de lo anterior, como prerrequisito se impone haber cursado alguna asignatura de topología general, en particular, la teoría de grupos abelianos de esta asignatura de Máster se supone conocida.

Otros prerrequisitos recomendables son: tener conocimientos básicos de Teoría de Grupos, incluyendo el tema de homomorfismos de grupos, y el estudio de los subgrupos y los grupos cocientes de un grupo.

También es recomendable poseer conocimientos básicos de Álgebra Lineal, especialmente en lo concerniente a espacios vectoriales, aplicaciones lineales y matrices, conocimientos básicos de Geometría Elemental, desde el punto de vista sintético y también desde el punto de vista analítico. En particular, es muy útil que el alumno sea capaz de representar en la recta real, en el plano y en el espacio euclídeo tridimensional, figuras geométricas y subconjuntos o partes definidos por un conjunto finito de ecuaciones o inecuaciones.

4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Objetivo general. Adquisición de los conocimientos fundamentales, teóricos y prácticos, de Topología Algebraica con el fin de proporcionar al alumno una formación lo suficientemente sólida para una futura dedicación, ya sea de estudio o investigación.

Conocimientos:

- Homotopía.
- Equivalencia de homotopía.
- Tipo de homotopía.
- Grupo fundamental de homotopía.
- Espacios contractibles y simplemente conexos.
- Grupo fundamental de homotopía de algunos espacios notables.

- Invariancia topológica del grupo fundamental de homotopía.
- Teorema de Van Kampen.
- Espacios recubridores.
- Símplices geométricos.
- Complejos simpliciales geométricos.
- Grupos de homología de un complejo simplicial geométrico.
- Característica de Euler-Poincaré de un complejo simplicial geométrico.
- Poliedros.
- Grupos de homología de poliedros.
- Homología singular.
- Homología relativa.
- Números de Betti y característica de Euler.
- Aplicaciones simpliciales.
- Aproximación simplicial. Número de Lefschetz.
- CW complejos.
- Cohomología.
- Teorema de los coeficientes universales.
- Orientación de variedades.
- Productos en Cohomología.
- Dualidad de Poincaré.

Destrezas:

- Poder decidir si existe una homotopía entre dos caminos definidos en un espacio, y en caso de que dicha homotopía exista, construirla.
- Saber distinguir si dos aplicaciones son homótopas o no, y si lo son, construir una homotopía entre ellas.
- Saber construir equivalencias de homotopía.
- Saber distinguir si dos espacios son del mismo tipo de homotopía o no.
- Saber determinar el grupo fundamental de homotopía de algunos espacios.
- Saber distinguir si un espacio es contractible o no lo es.
- Entender los conceptos de espacio simplemente conexo y espacio contractible y saber construir ejemplos de espacios simplemente conexos que no son contractibles.
- Utilizar la equivalencia entre el hecho de que dos espacios tengan el mismo tipo de homotopía y la existencia de un tercer espacio del cuál los dos iniciales sean retractos de deformación.
- Saber construir el grupo fundamental de homotopía utilizando el teorema de Van Kampen.
- Saber calcular el grupo fundamental de algunos espacios, vía la acción de grupos en espacios simplemente conexos.
- Manejar en la práctica la invariancia topológica del grupo fundamental de homotopía.
- Saber determinar la estructura de un grupo abeliano de tipo finito definido por una presentación.
- Saber manejar complejos singulares en el plano y el espacio tridimensional.
- Saber calcular los grupos de homología de un complejo singular.
- Saber determinar las componentes conexas de un complejo singular y conocer su relación con el grupo de homología de dimensión cero del complejo.
- Manejar la sucesión exacta de homología de un par.
- Manejar el teorema de escisión en el caso de esferas, para poder deducir algunas propiedades topológicas de éstas.
- Saber calcular los invariantes topológicos y, en particular, la característica de Euler-Poincaré de un complejo singular.
- Manejar algunas aplicaciones de la sucesión de Mayer-Vietoris.
- Ser capaz de distinguir algunos poliedros curvilíneos utilizando los grupos de homología y / o los invariantes topológicos.
- Utilizar el teorema de Lefschetz para estudiar los puntos fijos de algunas aplicaciones entre espacios proyectivos.
- Utilizar el producto cup para estudiar la equivalencia topológica de ciertos espacios, así como para el estudio de propiedades de aplicaciones entre ciertos espacios topológicos.

Competencias (o aptitudes):

- Ser capaz de desenvolverse en el lenguaje de la Topología Algebraica, y estar en condiciones para seguir un estudio posterior.

- Saber plantear problemas en el contexto de la Homología y la Cohomología, para su estudio posterior.
- Estar en condiciones de proseguir estudios más profundos en las diversas líneas de investigación de este área y de áreas relacionadas.

5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

1. Homotopía de caminos. Homotopía de aplicaciones continuas. Equivalencia homotópica. Tipo de homotopía.

2. Grupo fundamental de homotopía de un espacio topológico.

3. Invariancia topológica del grupo fundamental de homotopía. Grupo fundamental de la circunferencia de radio unidad del plano euclídeo.

4. Teorema de Van Kampen.

5. Espacios recubridores.

6. Complejos simpliciales geométricos orientados.

7. Grupos de homología de un complejo simplicial geométrico orientado.

8. Poliedros. Grupos de homología de los poliedros. Invariancia topológica de los grupos de homología de los poliedros.

9. Homología singular.

10. Homología relativa.

11. Sucesiones exactas y escisión.

12. Equivalencia entre la homología simplicial y singular.

13. El teorema de escisión.

14. Sucesión de Mayer-Vietoris.

15. Construcción de espacios. Complejos esféricos.

16. Números de Betti y característica de Euler.

17. Aproximación simplicial. Número de Lefschetz.

18. Grupos de Cohomología .

19. El teorema de los coeficientes universales.

20. Productos en Cohomología.

21. Dualidad de Poincaré.

6.EQUIPO DOCENTE

- JOSE LUIS ESTEVEZ BALEA

7.METODOLOGÍA

- Enseñanza a distancia con la metodología de la UNED.

- Cursos virtuales (enseñanza virtualizada).

- Aprendizaje basado en problemas resueltos.

- Resolución, por parte del alumno, de problemas y ejercicios.

8.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9780521795401
Título: ALGEBRAIC TOPOLOGY (2001)
Autor/es: Allen Hatcher ;
Editorial: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Buscarlo en libreria virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

9.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Comentarios y anexos:

Algunos libros de Teoría de Grupos:

Baumslag, B.; Chandler, B. Group Theory. (Including 600 Solved Problems) Schaum's Outline Series. Mc Graw-Hill. USA. 1968.
Bujalance, E.; Etayo, J. J.; Gamboa, J.M. Teoría Elemental de Grupos. Cuadernos de la UNED. UNED. Madrid. 1987.
Ledermann, W. Introduction to Group Theory. Longman Scientific & Technical. Harlow. 1989.

Algunos libros de Álgebra (Anillos, cuerpos, espacios vectoriales, etc.):

Gamboa, J. M.; Ruiz, J. M. Anillos y Cuerpos Conmutativos. Cuadernos de la UNED. UNED. Madrid. Tercera edición. Primera reimpresión. 2003.
Lang, S. Álgebra. Aguilar ediciones. Madrid. Primera edición. Primera reimpresión. 1973.

Algunos libros de Topología Algebraica:

Libros de carácter introductorio:

Alexandroff, P. Elementary concepts of Topology. Dover Publications. New York. 1961.
Armstrong, M. A. Topología Básica. Editorial Reverté. Barcelona. 1987.
Chinn, W. G.; Steenrod, N. E. Primeros conceptos de Topología. Editorial Alambra. Madrid. 1975.
Gemignani, M. G. Elementary Topology. Second Edition. Dover Publications. New York. 1990.
Keesee, J. W. Introducción a la Topología Algebraica. Editorial Alhambra. Madrid. 1971.
Kosniowski, C. Topología Algebraica. Editorial Reverté. Barcelona. 1992.
Margalef, J.; Outerelo, E. Introducción a la Topología. Editorial Complutense. Madrid. 1993.
Massey. W. S. Introducción a la Topología Algebraica. Editorial Reverté. Barcelona. 1972.
Mc Carty, G. Topology. An Introduction with Applications to Topological Groups. Dover Publications. New York. 1988.
Mendelson, B. Introduction to Topology. Third Edition. Dover Publications. New York. 1990.
Munkres, J. R. Topología. 2ª Edición. Prentice Hall. Pearson Educación. Madrid. 2002.
Newman, M. H. A. Elements of the Topology of Plane Sets of Points. Dover

Publications. New York. 1992.
Singer I. M.; Thorpe, J. A. Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. Berlín-Heidelberg-New York. 1967.
Wall, C. T. C. A Geometric Introduction to Topology. Dover Publications. New York. 1993.

Libros con nivel de desarrollo más profundo:

Ayala, R.; Domínguez, E.; Quintero, A. Elementos de la Teoría de Homología Clásica. Universidad de Sevilla. Secretariado de Publicaciones. Sevilla. 2002.
Dold, A. Lectures on Algebraic Topology. Second Edition. Springer-Verlag. Berlín-Heidelberg. 1980.
Dugundji, J. Topology. Allyn and Bacon. Boston. 1966.
Fulton, W. Algebraic Topology. A First Course. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York. 1995.

Hatcher, Allen. Algebraic Topology. Cambridge University Press. 2002.
Hocking, J. G.; Young, G. S. Topología. Editorial Reverté. Barcelona. 1975.
Massey, W. S. Singular Homology Theory. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York. 1980.
Massey, W. S. A Basic Course in Algebraic Topology. Springer-Verlag. New York. 1991.
Maunder, C. R. F. Introduction to Algebraic Topology. Cambridge University Press. Cambridge. 1980.
Munkres, J. R. Elements of Algebraic Topology. Addison-Wesley. Menlo Park, California. 1984.
Novikov, S. P.; Rokhlin, V. A. (Editors) Topology II. Homotopy and Homology. Classical Manifolds. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Vol. 24. Springer-Verlag. Berlín-Heidelberg. 2004.
Rohlin, V.; Fuchs, D. Premier Cours de Topologie. Chapitres Géométriques. Editorial Mir. Moscú. 1981.
Rotman, J. J. An Introduction to Algebraic Topology. Springer-Verlag. New York. 1988.
Spanier, E. H. Algebraic Topology. Mc Graw-Hill. New York. 1966.
Switzer, R. M. Algebraic Topology-Homotopy and Homology. Springer-Verlag. Berlín-Heidelberg-New York. 1975.
Van Mill, J. Infinite-Dimensional Topology. Prerequisites and Introduction. North-Holland. Elsevier Science Publishers. Amsterdam. 1989.
Vick, J. W. Homology Theory. An Introduction to Algebraic Topology. Springer-Verlag. New York. 1994.
Whitehead, G. W. Elements of Homotopy Theory. Graduate Texts in Mathematics, 61. Springer-Verlag. Berlín-Heidelberg-New York. 1978.
Zisman, M. Topología Algebraica Elemental. Editorial Paraninfo. Madrid. 1979.

Lecturas de motivación, ricas en ideas intuitivas:

Barr, S. Experiments in Topology. Dover Publications. New York. 1989.
Huggett, S. A.; Jordan, D. A Topological Aperitif. Springer-Verlag. London. 2001.
Rolfsen, Dale. Knots and links. Publish or Perish, Inc. 1990.
Weeks, J. R. The Shape of Space. Second Edition. Marcel Dekker. New York. 2002.

El gran libro sobre la geometría y la topología de las variedades de dimensión tres:

Thurston, William P. The Geometry and Topology of three manifolds. [*http://www.msri.org/gt3m/*](http://www.msri.org/gt3m/)
Esta es una obra que ha marcado un hito en el estudio de la topología de las variedades tridimensionales a través de la geometría. Ha sido y sigue siendo fuente de investigación en este campo. Su lectura no es fácil por el estilo informal y es necesario apoyarse en estudios de otros autores sobre la misma obra.

Existe una versión de imprenta de los primeros capítulos con un desarrollo más formal pero siguiendo el estilo directo del autor:
Thurston, William P. The Geometry and Topology of three manifolds. Vol 1. Princeton University Press.

10.RECURSOS DE APOYO AL ESTUDIO

· Curso Virtual.
· Plataforma aLF.

Otros Recursos de Apoyo.

· En el curso virtual se proporcionan accesos a páginas web con contenidos y software relacionados con la asignatura.

11.TUTORIZACIÓN Y SEGUIMIENTO

La tutorización se llevará a cabo a través de los siguientes medios:
Teléfono del profesor: 91 398 7239.
Correo electrónico del profesor: jestevez@mat.uned.es.
Mensajes a través del curso virtual.
Control de los foros del curso virtual.
Correo postal mantenido con la dirección del profesor:
José Luis Estévez Balea
Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias
UNED
Paseo Senda del Rey, 9
Despacho 143
28040 MADRID (España).

12.EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

El procedimiento general de evaluación se realizará básicamente a través de las Pruebas Presenciales con opción de evaluación continua.

Concretamente, el estudiante pueda optar por realizar únicamente la Prueba Presencial, que constará de cuatro preguntas. Estás preguntas son prácticas o teórico-prácticas.

Existe la opción de realizar además una serie de diez ejercicios propuestos por el equipo docente desde el principio del curso. La calificación de estos ejercicios será un 30% a la nota final y la de la Prueba Presencial en este caso un 70%. En este caso es imprescindible obtener más de un 4 sobre 10 en la nota de la Prueba Presencial.

En la evaluación de las pruebas de desarrollo se tendrá en cuenta la justificación razonada de las respuestas, la utilización adecuada del lenguaje matemático y la claridad en la exposición.

Por último, la participación significativa en los foros de contenidos puede mejorar la calificación final para aquellos estudiantes que se encuentren muy cerca de una calificación superior, como por ejemplo un 6,75 podría convertirse en un 7, notable.

13.COLABORADORES DOCENTES

Véase equipo docente.